

第3讲 二次函数图象专题（二）（加油站）

一、二次函数与方程综合

练习1

1. 在平面直角坐标系中，已知 $A(2, 4)$ 、 $B(2, -1)$ ，若抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点，且与 y 轴相交于点 C ，则下列四种说法：①当 $k = 0$ 时，抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与 x 轴有唯一公共点；②当 $x > 4$ 时， y 随 x 的增大而增大；③点 C 的纵坐标的最大值为2；④抛物线与 x 轴的两交点间的距离的最大值为 $\sqrt{6}$ ；其中正确的是（ ）。

A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

2. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ （ a, b, c 为常数， $a > 0$ ）经过点 $(1, 0)$ ， $(0, -1)$ ，其对称轴在 y 轴右侧。有下列结论：

- ① $a - b - 1 = 0$ ；
②方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根为1，另一个根为 $-\frac{1}{a}$ ；
③ $a > 1$ 。

其中，正确结论的个数为（ ）。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

练习2

3. 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ （ $a \neq 0$ ）的图象上有两点，坐标分别为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，其中 $x_1 < x_2$ ， $y_1 y_2 < 0$ ，则下列判断正确的是（ ）。

- A. $a < 0$
B. $a > 0$
C. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有一根 x_0 满足 $x_1 < x_0 < x_2$
D. $y_1 < y_2$

4. 对于一个函数，当自变量 x 取 a 时，其函数值 y 也等于 a ，我们称 a 为这个函数的不动点。若二次函数 $y = x^2 + 2x + c$ （ c 为常数）有两个不相等且都小于1的不动点，则 c 的取值范围是（ ）。

A. $c < -3$ B. $-3 < c < -2$ C. $-2 < c < \frac{1}{4}$ D. $c > \frac{1}{4}$

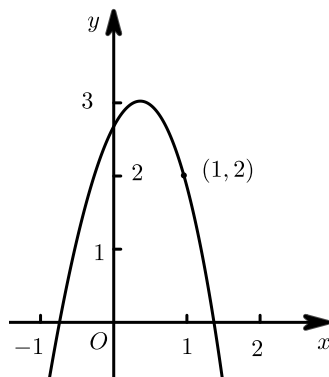
5. 在平面直角坐标系内，抛物线 $y = ax^2 - x + 1 (a \neq 0)$ 与线段 AB 有两个不同的交点，其中点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(1, 1)$ 。有下列结论：
- ①直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ；②方程 $ax^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ 两个不相等的实数根；③ a 的取值范围是 $a \leq -2$ 或 $1 \leq a < \frac{9}{8}$ 。
- 其中，正确结论的个数为（ ）。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

练习3

6. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数， $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$ ， $(0, 3)$ ，其对称轴在 y 轴右侧，有下列结论：
- ①抛物线经过点 $(1, 0)$ ；
- ②方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根；
- ③ $-3 < a + b < 3$ 。
- 其中，正确结论的个数为（ ）。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
7. 已知抛物线 $y = (x + a)(x - a - 1)$ (a 为常数 $a \neq 0$)。有下列结论：
- ①抛物线的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$ ；
- ②方程 $(x + a)(x - a - 1) = 1$ 有两个不相等的实数根；
- ③抛物线上有两点 $P(x_0, m)$ ， $Q(1, n)$ ，若 $m < n$ ，则 $0 < x_0 < 1$ 。
- 其中，正确结论的个数为（ ）。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
8. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, 3)$ 和 $(0, 4)$ 之间（包含这两个点）。有下列结论：
- ① $abc < 0$ ；
- ②关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 2a$ 有两个不等的实数根；
- ③ $-\frac{4}{3} \leq a \leq -1$ ，
- 其中，正确结论的个数是（ ）。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

9. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 的图象经过点 $(1, 2)$, 与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 其中 $-1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 2$, 则下列结论:

① $2a + b > 0$; ② $a < -1$; ③ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + k^2 = 0$ (k 为任意实数) 没有实数根; 其中正确的有 () .



- A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 3个

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的 y 与 x 的部分对应值如下表:

x	...	-5	-4	-2	0	2	...
y	...	6	0	-6	-4	6	...

有下列结论: ① $a > 0$; ② 当 $x = -2$ 时, 函数的最小值为 -6 ; ③ 若点 $(-8, y_1)$, 点 $(8, y_2)$ 在该二次函数图象上, 则 $y_1 < y_2$; ④ 方程 $ax^2 + bx + c = -5$ 有两个不相等的实数根. 其中, 正确结论的个数是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

练习4

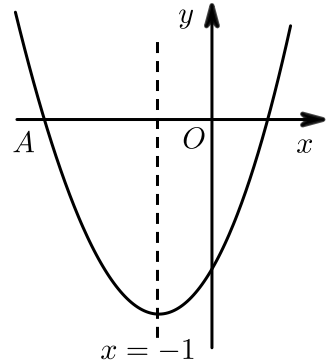
11. “如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个公共点, 那么一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根.” 请根据你对这句话的理解, 解决下面问题: 若 m, n ($m < n$) 是关于 x 的方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两根, 且 $a < b$, 则 a, b, m, n 的大小关系是 _____ .
12. 已知二次函数 $y = (x - p)(x - q) - 2$, 若 m, n 是关于 x 的方程 $(x - p)(x - q) - 2 = 0$ 的两个根, 则实数 m, n, p, q 的大小关系可能是 () .
- A. $m < p < q < n$ B. $m < p < n < q$ C. $p < m < n < q$ D. $p < m < q < n$
13. 已知二次函数 $y = (x - a)(x - b) - \frac{1}{2}$ ($a < b$), 且 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是方程 $(x - a)(x - b) - \frac{1}{2} = 0$ 的两个根, 则实数 a, b, x_1, x_2 的大小关系为 () .
- A. $a < x_1 < b < x_2$ B. $a < x_1 < x_2 < b$ C. $x_1 < a < x_2 < b$ D. $x_1 < a < b < x_2$

练习5

14. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$ ，其对称轴为直线 $x = -1$ ，

有下列结论：① $abc < 0$ ；② $a - b - 2c > 0$ ；③关于 x 的方程 $ax^2 + (b - m)x + c = m$ 有两个不相等的实数根；④若 $P(-5, y_1)$ ， $Q(m, y_2)$ 是抛物线上两点，且 $y_1 > y_2$ ，则实数 m 的取值范围是 $-5 < m < 3$ 。

其中正确结论的个数是（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

15. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 中, x 与 y 的部分对应值如下表:

x	$\dots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$
y	$\dots$	-3.5	-1	0.5	1	0.5	-1	-3.5	$\dots$

有下列结论:

①函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最大值, 且最大值为1。

②若 x_0 满足 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, 则 $2 < x_0 < 3$ 或 $-1 < x_0 < 0$ 。

③若方程 $ax^2 + bx + c + m = 0$ 有两个不等的实数根, 则 $m < -1$

④对于任意实数 m , 当 $m \neq 1$ 时, 有 $m(am + b) < \frac{1}{2}$

其中, 正确结论的个数是（ ）。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

16. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 中的 x 与 y 的部分对应值如下表:

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

下列结论, 其中正确的有 () 个.

- (1) $ac < 0$;
- (2) 当 $x > 1$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小;
- (3) $x = 3$ 是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根;
- (4) 当 $-1 < x < 3$ 时, $ax^2 + (b-1)x + c > 0$.

A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

17. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 与 y 轴的交点在 $(0, 2)$, $(0, 3)$ 之间 (包含端点), 顶点坐标为 $(1, n)$, 则下列结论:

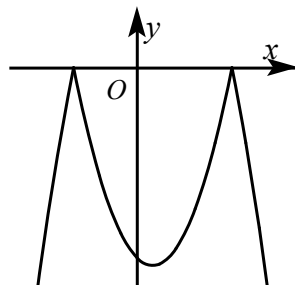
- ① $4a + 2b < 0$.
- ② $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$.
- ③ 对于任意实数 m , $a + b \geq am^2 + bm$ 总成立.
- ④ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = n - 1$ 有两个不相等的实数根.

其中结论正确的个数为 () .

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

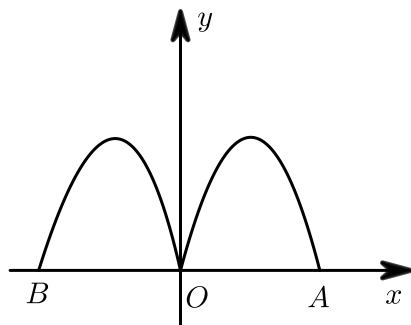
练习6

18. 已知二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 及一次函数 $y = -x + m$, 将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方, 图象的其余部分不变, 得到一个新函数 (如图所示), 当直线 $y = -x + m$ 与新图象有 4 个交点时, m 的取值范围是 () .

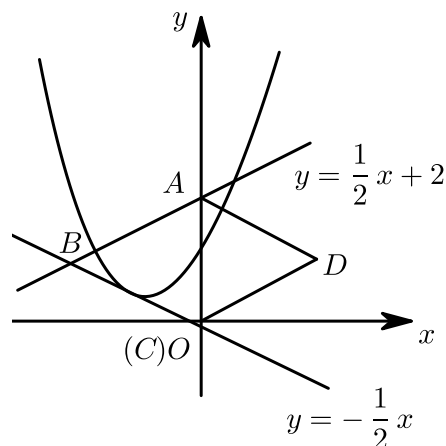


A. $-6 < m < -2$ B. $-\frac{25}{4} < m < 2$ C. $-2 < m < 3$ D. $-\frac{25}{4} < m < 3$

19. 如图，抛物线 $y = -2x^2 + 4x$ 与 x 轴交于点 O 、 A ，把抛物线在 x 轴及其上方的部分记为 C_1 ，将 C_1 以 y 轴为对称轴作轴对称得到 C_2 ， C_2 与 x 轴交于点 B ，若直线 $y = x + m$ 与 C_1 、 C_2 共有3个不同的交点，则 m 的取值范围是（ ）。



- A. $0 < m < \frac{9}{8}$ B. $\frac{9}{8} < m < \frac{25}{8}$ C. $0 < m < \frac{25}{8}$ D. $m < \frac{9}{8}$ 或 $m < \frac{25}{8}$
20. 如图，直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 y 轴交于点 A ，与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 交于点 B ，以 AB 为边向右做菱形 $ABCD$ ，点 C 恰与原点 O 重合，抛物线 $y = (x - h)^2 + k$ 的顶点在直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上移动，若抛物线与菱形的边 AB 、 BC 都有公共点，则 h 的取值范围是（ ）。



- A. $-2 \leq h \leq \frac{1}{2}$ B. $-2 \leq h \leq 1$ C. $-1 \leq h \leq \frac{3}{2}$ D. $-1 \leq h \leq \frac{1}{2}$

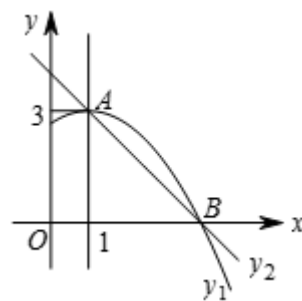
二、二次函数与不等式综合

练习7

21. 如图是抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象的一部分，抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$ ，与 x 轴的一个交点为 B ，直线 $y_2 = mx + n (m \neq 0)$ 经过 A, B 两点，下列结论：

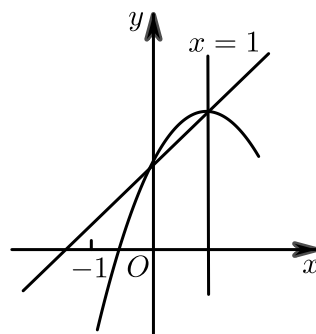
- ① 当 $x < 1$ 时，有 $y_1 < y_2$.
- ② $a + b + c = m + n$.
- ③ $b^2 - 4ac = -12a$.
- ④ 若 $m - n = -5$ ，则 B 点坐标为 $(4, 0)$.

其中正确的是 () .



- A. ① B. ①② C. ①②③ D. ①②③④

22. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点和抛物线与 y 轴的交点在一次函数 $y = kx + 1 (k \neq 0)$ 的图象上，它的对称轴是 $x = 1$ ，有以下四个结论：① $abc > 0$. ② $a < -\frac{1}{3}$. ③ $a = -k$. ④ 当 $0 < x < 1$ 时， $ax + b > k$ ，其中正确的结论有 () .



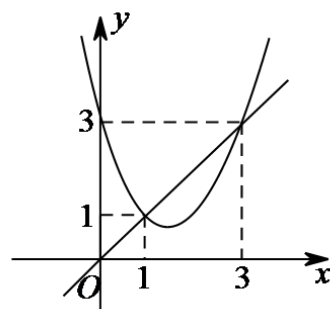
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

练习8

23. 函数 $y = x^2 + bx + c$ 与 $y = x$ 的图像如图所示，有以下结论：

- ① $b^2 - 4c > 0$ ；
- ② $b + c = 0$ ；
- ③ $2b + c + 3 = 0$ ；
- ④ 当 $1 < x < 3$ 时， $x^2 + (b - 1)x + c < 0$ 。

正确的选项有（ ）个。



- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

24. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	...	-1	0	1	3	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	-1	3	5	3	...

有下列结论：

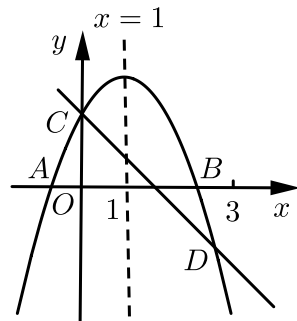
- ① $ac < 0$ ；② $x = 3$ 是方程 $ax^2 + (b - 1)x + c = 0$ 的一个根；
- ③ 当 $x > 1$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小；④ 当 $-1 < x < 3$ ， $ax^2 + (b - 1)x + c > 0$ 。

其中，正确结论的个数是（ ）。

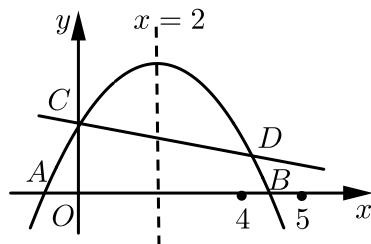
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

练习9

25. 如图所示，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x = 1$ 。直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C, D 两点， D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3，则下列结论：① $a - b + c < 0$ ；② $2a + b + c > 0$ ；③ $x(ax + b) \leq a + b$ ；④ $a < -1$ 。其中正确的有（ ）。



- A. ①②③ B. ①③④ C. ①②④ D. ①②③④
26. 如图，二次的数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点，点 B 位于 $(4, 0)$ 、 $(5, 0)$ 之间，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x = 2$ ，直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C, D 两点， D 点在 x 轴上方且横坐标小于 5，则下列结论：① $4a + b + c > 0$ ；② $a - b + c < 0$ ；③ $m(am + b) < 4a + 2b$ (其中 m 为任意实数)；④ $a < -1$ ，其中正确的是（ ）。



- A. ①②③④ B. ①②③ C. ①②④ D. ①③④

三、二次函数其它综合

练习10

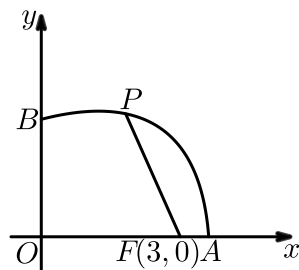
27. 若抛物线 $y = x^2 + (a + 1)x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$ 恒过一个定点，求出该定点坐标为 _____。
28. 二次函数 $y = ax^2 - 2ax - 1 + a (a \neq 0)$ 恒过一定点，该定点坐标为 _____。
29. 已知抛物线 $y = kx^2 + (2k + 1)x + 2$ 恒过定点，请直接写出定点坐标 _____。

练习11

30. 在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是 $(0, 2)$ ．在 x 轴上任取一点 M ，连接 AM ，作线段 AM 的垂直平分线 l_1 ，过 M 点作 x 轴的垂线 l_2 ，交 l_1 于 P ，设 P 点坐标为 (x, y) ，则 x 与 y 满足的关系式为（ ）．

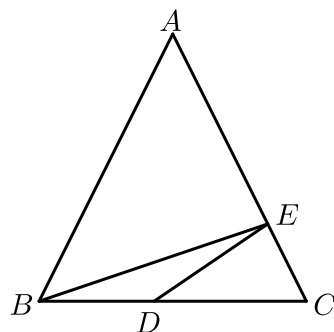
A. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ B. $y = \frac{1}{4}x^2$ C. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ D. $y = \frac{1}{2}x^2$

31. 如图所示，已知点 F 的坐标为 $(3, 0)$ ，点 A 、 B 分别是某函数图象与 x 轴、 y 轴的交点，点 P 是此图象上的一动点，设点 P 的横坐标为 x ， PF 的长为 d ，且 d 与 x 之间满足关系式： $d = 5 - \frac{3}{5}x (0 \leq x \leq 5)$ ，给出以下四个结论：① $AF = 2$ ；② $BF = 5$ ；③ $OA = 5$ ；④ $OB = 3$ ．其中正确结论的序号是（ ）．



- A. ①②③ B. ①②③④ C. ②③④ D. ①②

32. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 6$ ， E 为 AC 边上的点且 $AE = 2EC$ ，点 D 在 BC 边上且满足 $BD = DE$ ，设 $BD = y$ ， $S_{\triangle ABC} = x$ ，则 y 与 x 的函数关系式为（ ）．



A. $y = \frac{1}{810}x^2 + \frac{5}{2}$ B. $y = \frac{2}{405}x^2 + \frac{5}{2}$ C. $y = \frac{1}{810}x^2 + 2$ D. $y = \frac{2}{405}x^2 + 2$